

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : حسابان	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۲ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	سوالات		
	نمره		

۱ نمودار تابع $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1}$ را رسم کنید.

۲ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید که: $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

۳ اگر مجموع جملات دنباله هندسی زیر ۱۳۶۴ باشد، مقدار x چقدر است؟

$$x, 2x, 4x, \dots, 512x$$

۴ جوابهای معادله گویای زیر را بیابید.

$$\frac{2x}{x+2} - \frac{3}{x-1} = 0$$

۵ اگر α یکی از ریشه‌های معادله $x^3 - 7x + 4 = 0$ باشد، حاصل $\alpha^2 - \frac{4}{\alpha}$ را به دست آورید.

۶ به ازای کدام بازه از a ، تابع زیر یک‌به‌یک است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2a & ; x < 0 \\ -2x + 3 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

۷ معادله خط $2x + y = 8$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ مماس است. مرکز این دایره بر روی خطی به معادله $y = 2x - 1$ قرار دارد. مرکز دایره را بیابید.

۸ اگر معادله $||x - 1| - 2| = k$ ، ۴ جواب داشته باشد، محدوده k را به دست آورید.

۹

فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت‌زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت است. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

۱۰

$A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور مربع ABCD هستند که این مربع در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است. مختصات رئوس C و D را به دست آورید.

۱۱

می‌دانیم α و β دو ریشه مثبت معادله $x^2 + mx + 5 = 0$ هستند و $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ به ترتیب تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. مقدار m را به دست آورید.

۱۲

معادله $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 2$ را حل کنید.

۱۳ به ازای چند عدد صحیح، نامعادله $\left| \frac{3x-4}{x-4} \right| \leq 1$ برقرار است؟

۱۴ نمودار تابع $\sqrt[3]{\log(x+2)} = \sqrt[3]{\log(y-2)}$ را رسم کنید.

۱۵ اگر $f(x) = [x] + 1$ و $g(x) = |x| - 1$ باشد، در این صورت حاصل $\frac{(f+g)(-1)}{(f+g)(1)}$ را به دست آورید.

۱۶ توابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ داده شده است.

الف ضابطه تابع $g \circ f$ را تعیین کنید.

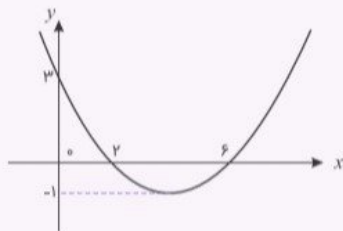
ب دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف آن به دست آورید.

۱۷ هزینه ارسال یک بسته پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است (حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم است).

x (وزن بسته) کیلوگرم)	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) بر حسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

الف ضابطهٔ تابعی را که جدول نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به دست آورید.

۱۸ اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطهٔ سهمی را مشخص کنید.



۱۹ یک‌به‌یک بودن تابع $f(x) = 3x + |x - 1|$ را به کمک رسم شکل بررسی کنید و وارون آن را در صورت یک‌به‌یک بودن به دست آورید.

۲۰ حاصل عبارت $[\sqrt{12}] + [\sqrt{13}] + \dots + [\sqrt{122}]$ را به دست آورید.

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۲۱ معادلهٔ $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است.

۲۲ دو تابع $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ باهم برابرند.

۲۳ اگر $\log 2 \simeq 0/3$ و $\log 7 \simeq 0/85$ باشد، حاصل $\log_{49} \sqrt[3]{7}$ را به دست آورید.

۲۴ معادله زیر را حل کنید.

$$(\sqrt{3} - 1)x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 2 = 0$$

۲۵ دامنه و برد تابع $f(x) = \sqrt{2^x + 2^{x+1}} + 1$ را بیابید.

۲۶ اگر $f(x)$ یک تابع خطی باشد به طوری که $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-x^2 + x - 1}{x}$ ، حاصل $f(6)$ را به دست آورید.

۲۷ در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم، آنگاه:

الف این جایزه چند گرم می شود؟

ب نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد.

۲۸ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 3 = 0$ باشند، بدون حل معادله حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

ب

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

۲۹ یکی از اضلاع مربعی بر خط $3x - 4y + 1 = 0$ واقع است. اگر $A(2, 1)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۳۰ معادله $5x^4 + 11x^2 + 6 = 0$ چند ریشه دارد؟

۳۱ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر با $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

۳۲ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به‌تنهایی انجام دهند؟

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\log_{\delta} x + \log_{\delta} 3 = \log_{\delta} 12$$

۳۳

$$\log(x + 3) + \log x = 1$$

۳۴

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2 - 4x} = \left(\frac{625}{81}\right)$$

۳۵

$$\log_{\sqrt{3}}(\log_{\sqrt[3]{5}}(\log_{\sqrt[3]{25}} x)) = 2$$

۳۶

در یک دنباله هندسی، جمله سیزدهم، ۸۰ واحد از جمله اول بیشتر و مجموع ۱۲ جمله اول ۲۰ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۳۷

۳۸ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 + 7x = \sqrt{2x^2 + 10x + 12} + 2x - 6$ را بیابید.

۳۹ اگر $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ باشد دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}(x)$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.

۴۰ اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله $(2k + 1)x^2 + x - 4 = 0$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ها چقدر است؟

۴۱ در دنباله حسابی $1, 5, 9, \dots, 401$:

الف مجموع جملات دنباله را به دست آورید.

$$|5x - 2| = |3x - 1| + |1 - 2x|$$

۴۳ قطر مربعی خط $3x + 2y = 10$ می‌باشد و یکی از رئوس آن نقطه $A(1, 2)$ است. مساحت مربع را به دست آورید.

۴۴ در تابع $f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ y = 2x - 2 \end{cases}$ اگر اعضای برد $B : \{0, 2\}$ باشند؛ اعضای دامنه را بیابید و نمودار ون (پیکانی) آن را رسم کنید.

۴۵ معادله زیر را حل کنید.

$$x^6 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

۴۶ نقاط A و B روی خط $y = 2x - 1$ قرار دارند. اگر این دو نقطه از خط $3y - 4x = 7$ به فاصله ۶ باشند، مختصات نقاط A و B را به دست آورید.

۴۷ اگر $f(x) = \sqrt{5-x}$ و $g(x) = x^2 + 3$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را بیابید.

۴۸ در دنباله حسابی $1, 2, 5, \dots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟

۴۹ اگر $f(x) = 4x - 3$ و $g(x) = x + 2$ ، تابع $(g \circ f)^{-1}$ را حساب کنید.

۵۰ اگر $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ ، دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟



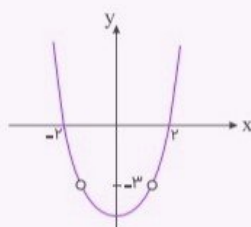
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : حسابان	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۲ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		نمره

۱ برای رسم نمودار تابع، ابتدا دامنه را به دست می آوریم: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
سپس تابع f را تا آنجا که می توانیم ساده می کنیم:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

$$= x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

حال تابع درجه ۲، $f(x) = x^2 - 4$ را با دامنه $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ رسم می کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

۲ ابتدا تعداد جملات را حساب می کنیم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 512x = x(2^{n-1}) \Rightarrow 2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n = 10$$

۳ حال مجموع جملات را حساب می کنیم و مساوی با ۱۳۶۴ قرار می دهیم:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 1364 = \frac{x(2^{10} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 1364 = 1023x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1364}{1023} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2x}{x+2} - \frac{3}{x-1} = \frac{2x(x-1) - 3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 25 - 4(2)(-6) \Rightarrow \Delta = 73$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{4}$$

۴

$$\alpha^3 - 7\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 7\alpha = -6$$

$$-\frac{6}{\alpha} - \alpha^2 = \frac{\alpha^3 - 7\alpha}{\alpha} - \alpha^2 = \alpha^2 - 7 - \alpha^2 = -7$$

تابع یک‌به‌یک است و عرض از مبدأ آن به ازای $x \geq 0$ می‌باشد. تابع $x^2 - 3x + 2a$ دارای طول رأس سهمی $\frac{3}{2}$ و دهانه سهمی روبه بالا می‌باشد. پس فقط کافی است $x^2 - 3x + 2a$ به ازای $x = 0$ ، بزرگتر مساوی از $-2x + 3$ به ازای $x = 0$ باشد.

$$x^2 - 3x + 2a \geq -2x + 3 \Rightarrow 2a \geq 3 \Rightarrow a \geq \frac{3}{2}$$

تمام نقاط روی خط به معادله $y = 2x - 1$ ، به صورت $(\alpha, 2\alpha - 1)$ قرار دارد. فاصله مرکز دایره تا خط مفروض، برابر $\sqrt{5}$ است. پس:

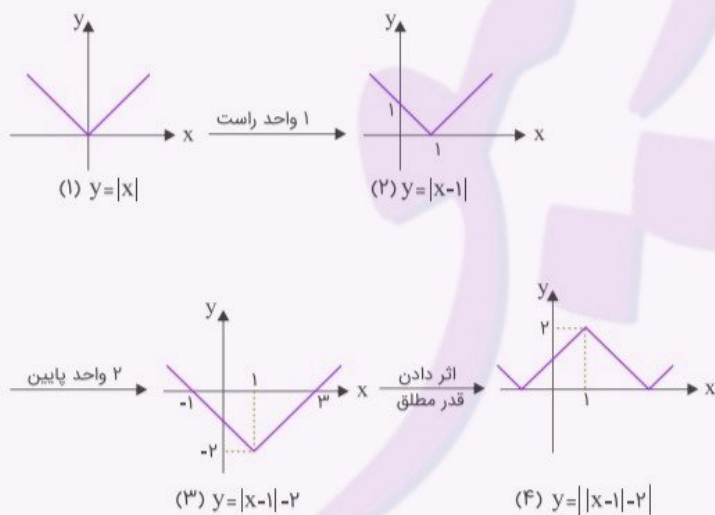
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ (\alpha, 2\alpha - 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{|2(\alpha) + (2\alpha - 1) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{|4\alpha - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |4\alpha - 2| = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2 = 5 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{4} \\ 4\alpha - 2 = -5 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

مرکز دایره دو نقطه می‌تواند باشد: $(1, 1)$ و $(\frac{7}{4}, \frac{3}{4})$

نمودار تابع $y = ||x - 1| - 2|$ را رسم می‌کنیم:



اگر خط افقی $y = k$ بخواند نمودار به دست آمده را در ۴ نقطه قطع کند، باید $0 < k < 2$ باشد.

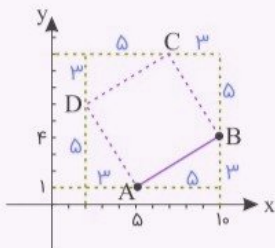
اگر سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب $k + 8$ کیلومتر بر ساعت باشد، آنگاه سرعت حرکت کشتی در خلاف جریان آب k کیلومتر بر ساعت است؛ بنابراین کشتی در مسیر خلاف جریان آب هر کیلومتر را در $\frac{1}{k}$ ساعت طی می‌کند و لذا کل مسیر در خلاف جریان آب را در $\frac{144}{k}$ ساعت طی می‌کند. در مسیر جریان آب هم هر کیلومتر را در $\frac{1}{k+8}$ ساعت می‌کند؛ بنابراین کل مسیر در جریان آب را در $\frac{144}{k+8}$ ساعت طی می‌کند.

همچنین اگر از ۱۷ ساعت سفر، ۲ ساعت توقف را کم کنیم، کشتی ۱۵ ساعت در حال حرکت بوده است که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{144}{k} + \frac{144}{k+8} &= 15 \xrightarrow{\times k(k+8)} 144(k+8) + 144k = 15k(k+8) \\ \Rightarrow 144k + 1152 + 144k &= 15k^2 + 120k \Rightarrow 15k^2 - 168k - 1152 = 0 \\ \xrightarrow{\div 3} 5k^2 - 56k - 384 &= 0 \Rightarrow (5k + 24)(k - 16) = 0 \Rightarrow k = 16 \text{ ق.ق. و } k = \frac{-24}{5} \text{ غ.ق.} \end{aligned}$$

سرعت حرکت کشتی در مسیر خلاف جریان آب ۱۶ کیلومتر بر ساعت است، در نتیجه در مسیر جریان آب سرعت، ۲۴ کیلومتر بر ساعت است.

نقاط A و B را در صفحه مختصات مشخص می‌کنیم:



چهار مثلثی که در کنار اضلاع مربع تشکیل شده‌اند، همنهشت هستند.

$$\begin{cases} y_D = y_A + 5 = 6 \\ x_D = x_A - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow D(2, 6) \quad \begin{cases} y_C = y_B + 5 = 9 \\ x_C = x_B - 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow C(7, 9)$$

اگر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل دنباله هندسی دهند، آنگاه:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha\beta)(5)$$

ازطرفی داریم: $S = -m$ و $P = 5$

$$\Rightarrow (-m)^2 = 5 \times 5 \Rightarrow m = \pm 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 5 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = 0 & \Delta > 0, S < 0, P > 0 \\ m = -5 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 & \Delta > 0, S > 0, P > 0 \end{cases}$$

باتوجه به شرط مسأله، مبنی بر دو ریشه مثبت، $m = -5$ قابل قبول است.

$$\frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} = 2 \Rightarrow x = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2 = 4(x-1) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس جواب $x = 2$ قابل قبول است.

می‌دانیم $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ حال:

$$\left|\frac{3x-4}{x-4}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{|3x-4|}{|x-4|} \leq 1 \Rightarrow |3x-4| \leq |x-4|$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(3x-4)^2 \leq (x-4)^2 \Rightarrow 9x^2 - 24x + 16 \leq x^2 - 8x + 16$$

$$\Rightarrow 8x(x-2) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس صفر، ۱ و ۲ جواب‌های صحیح نامعادله داده شده هستند.

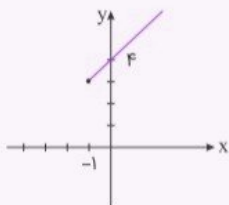
برای رسم نمودار ابتدا دامنه را محاسبه کرده، سپس عبارت را ساده‌سازی و در انتها رسم می‌کنیم:

$$\log(x+2) \geq 0 \Rightarrow x+2 \geq 1 \Rightarrow x \geq -1 \quad (I)$$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow x \geq -1$$

$$\sqrt[3]{\log(x+2)} = \sqrt[3]{\log(y-2)} \Rightarrow x+2 = y-2 \Rightarrow y = x+4$$



$$f(x) = [x] + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = [-1] + 1 = -1 + 1 = 0 \\ f(1) = [1] + 1 = 2 \end{cases}$$

$$g(x) = |x| - 1 \Rightarrow \begin{cases} g(-1) = |-1| - 1 = 1 - 1 = 0 \\ g(1) = |1| - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{(f+g)(-1)}{(f+g)(1)} = \frac{f(-1)+g(-1)}{f(1)+g(1)} = \frac{0+0}{2+0} = 0$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(\sqrt{x-4})^2 - 1}$$

$$D_f = [\frac{1}{2}, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = [\frac{1}{2}, +\infty) - \{\frac{1}{2}\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5 & ; 0 < x \leq 2 \\ 10 & ; 2 < x \leq 5 \\ 17 & ; 5 < x \leq 10 \\ 20 & ; 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

$$\text{دامنه : } D = (0, 12]$$

$$\text{برد : } \{5, 10, 17, 20\}$$

راحل اول:

از آنجا که $x' = 2$ و $x'' = 6$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند، می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند و داریم:

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ است که پس از ساده‌سازی به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

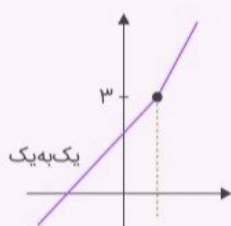
راحل دوم:

از آنجا که $f(0) = 3$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$ ؛ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

$$\frac{c}{a} = 12 \Rightarrow \frac{3}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a} = 8$ و $a = \frac{1}{4}$ پس $b = -2$ و در نتیجه $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + x - 1 & ; x \geq 1 \\ 3x - x + 1 & ; x < 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & ; x \geq 1 \\ 2x + 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{4} & ; x \geq 3 \\ \frac{x-1}{2} & ; x < 3 \end{cases}$$

$$\underbrace{[\sqrt{82}] + [\sqrt{83}] + \dots + [\sqrt{99}]}_{\text{جمله ۱۸}} + \underbrace{[\sqrt{100}] + [\sqrt{101}] + \dots + [\sqrt{120}]}_{\text{جمله ۲۱}} + \underbrace{[\sqrt{121}] + [\sqrt{122}]}_{\text{جمله ۲}}$$

$$[\sqrt{82}] = [\sqrt{83}] = \dots = [\sqrt{99}] = 9 \Rightarrow \underbrace{18}_{\text{جمله}} \times \underbrace{9}_{\text{حاصل}} = 162$$

$$[\sqrt{100}] = [\sqrt{101}] = \dots = [\sqrt{120}] = 10 \Rightarrow 21 \times 10 = 210$$

$$[\sqrt{121}] = [\sqrt{122}] = 11 \Rightarrow 2 \times 11 = 22$$

$$\text{حاصل کل} = 162 + 210 + 22 = 394$$

پاسخ سؤالات ۲۱ تا ۲۲

۲۱

نادرست

۲۲

نادرست

۲۳

نکته: $\log_{b^n}^a = \frac{1}{n} \log_b^a$

$$\log_{\sqrt[3]{9}}^{\sqrt[3]{2}} = \log_{\sqrt[3]{27}}^{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{3} \log_{\sqrt[3]{27}}^{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{3} \frac{\log 2}{\log \sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} \times \frac{0/3}{0/18} = \frac{1}{18}$$

۲۴

اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $a + c = b$ ، آنگاه معادله دارای ریشه‌های -1 و $-\frac{c}{a}$ است.
حال در معادله داده شده داریم:

$$a + c = b \Rightarrow (\sqrt{3} - 1) + 2 = \sqrt{3} + 1$$

شرط فوق برای این معادله برقرار است، در نتیجه:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{-2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = -(\sqrt{3}+1) \end{cases}$$

۲۵

$$y^x = t \Rightarrow f(x) = \sqrt{t^y + yt + 1} = |t + 1|$$

$$\Rightarrow f(x) = |y^x + 1| = y^x + 1$$

$$R = (1, +\infty), D = \mathbb{R}$$

چون تابع $f(x)$ یک تابع خطی است، پس فرم آن به صورت $f(x) = ax + b$ می‌باشد. حال باید تابعی پیدا کرد که $f(x)$ و $f(\frac{1}{x})$ آن برابر باشد یا به عبارت دیگر $x = \frac{1}{x}$:

$$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) + f(1) = \frac{-1^2 + 1 - 1}{1} = -1 \Rightarrow 2f(1) = -1 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(-1) + f(-1) = \frac{-(-1)^2 - 1 - 1}{-1} = 3 \Rightarrow 2f(-1) = 3 \Rightarrow f(-1) = \frac{3}{2}$$

حال معادله خط $f(x)$ را می‌نویسیم:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2})}{-1 - 1} = -1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = (-1)(x - 1) \Rightarrow y = -x + \frac{1}{2}$$

$$f(6) = -6 + \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$$

در صفحه شطرنج ۶۴ خانه داریم:

$$1, 2, 4, \dots, 2^{63}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1(1 - 2^{64})}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \text{ گرم}$$

$$2^{64} - 1 = (2^{10})^6 \times 2^4 - 1 = 1024^6 \times 16 - 1$$

می‌دانیم ۱۰۰۰ میلیارد برابر با 10^{12} است و یک تن برابر با 1000^2 گرم است. در نتیجه ۱۰۰۰ میلیارد تن برابر با 1000^6 است که از مقدار $1024^6 \times 16 - 1$ کمتر است.

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2(\frac{c}{a})}{\frac{-b}{a}} \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2c}{-b} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$a = AH = \frac{|3(2) - 4(1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$S = a^2 = \frac{9}{25}$$

برای حل این معادله، تغییر متغیر نیاز است. قرار می‌دهیم: $x^2 = t$. معادله پس از تغییر متغیر به شکل زیر درمی‌آید:

$$5x^6 + 11x^2 + 6 = 0 \xrightarrow{x^2=t} 5t^3 + 11t + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \times \\ t = -\frac{6}{5} \Rightarrow x^2 = -\frac{6}{5} \times \end{cases}$$

پس معادله فوق ریشه حقیقی ندارد.

نقطه دلخواه $(0, \frac{-c'}{b})$ را روی خط $ax + by + c' = 0$ در نظر می‌گیریم، سپس فاصله آن نقطه را تا خط $ax + by + c = 0$ به دست می‌آوریم.

$$\frac{|(0 \times a) + b(\frac{-c'}{b}) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فرض می‌کنیم ماشین A کار را در x ساعت و ماشین B همان کار را در $x + 15$ ساعت انجام دهند و هر دو ماشین کار را در 18 ساعت انجام می‌دهند یعنی ماشین A در یک ساعت $\frac{1}{x}$ کار را و ماشین B در یک ساعت $\frac{1}{x+15}$ کار و هر دو ماشین در یک ساعت $\frac{1}{18}$ کار را تمام کرده‌اند.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} &= \frac{1}{18} \Rightarrow 18(x+15) + 18x = x(x+15) \\ \Rightarrow 18x + 270 + 18x &= x^2 + 15x \Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0 \\ \Rightarrow (x+9)(x-30) &= 0 \Rightarrow x = 30 \text{ ق.ق. و } x = -9 \text{ غ.ق.} \end{aligned}$$

ماشین A کار را در 30 ساعت و ماشین B کار را در 45 ساعت به‌تنهایی انجام می‌دهند.

پاسخ سؤالات ۳۳ تا ۳۶

$$\log_5(3x) = \log_5 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

$$\log x(x+3) = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 10 \Rightarrow (x+5)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \text{ غ.ق.} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-4x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Rightarrow x^2 - 4x = -4 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt[3]{F}}(\log_{\sqrt[3]{F}} x) &= (\sqrt[3]{F})^2 \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{F}} x = (\sqrt[3]{F})^{(\sqrt[3]{F})^2} \\ \Rightarrow x &= (\sqrt[3]{F})^{(\sqrt[3]{F})^{(\sqrt[3]{F})^2}} = (\sqrt[3]{F})^{(\sqrt[3]{F})^3} = 25 \end{aligned}$$

$$a_{13} - a_1 = 80$$

مجموع ۱۲ جمله اول ۲۰ است، پس:

$$S_{12} = \frac{a_1(q^{12} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{12} = \frac{\overbrace{a_1 q^{12}}^{a_{13}} - a_1}{q - 1} \Rightarrow S_{12} = \frac{\overbrace{a_{13} - a_1}^{80}}{q - 1}$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{80}{q - 1} \Rightarrow q - 1 = 4 \Rightarrow q = 5$$

$$x^2 + 7x = \sqrt{2x^2 + 10x + 12} + 2x - 6$$

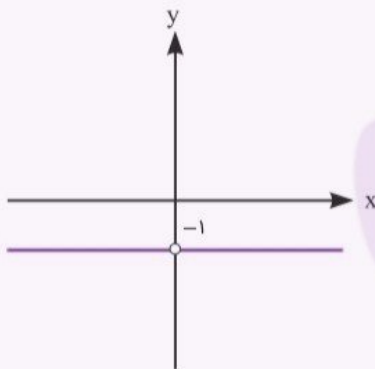
$$\Rightarrow x^2 + 7x - 2x + 6 = \sqrt{2x^2 + 10x + 12}$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 6 = \sqrt{2(x^2 + 5x + 6)}$$

$$\xrightarrow{x^2 + 5x + 6 = t} t = \sqrt{2t} \Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 6 \\ x^2 + 5x + 6 = 2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

پس حاصل ضرب ریشه‌های معادله، ۲۴ است.



$$\frac{f}{g}(x) = \frac{|x|}{-|x|} = \begin{cases} -1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$x = 1 \Rightarrow 2k + 1 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

$$3x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{4}{3}$$

$$a_n = fn - 3 \Rightarrow fn - 3 = f \cdot 1 \Rightarrow fn = f \cdot 1 + 3 \Rightarrow fn = f \cdot f \Rightarrow n = \frac{f \cdot f}{f} = 101$$

$$S_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2} = \frac{101 \times (1 + f \cdot 1)}{2} = \frac{101 \times f \cdot 2}{2} = 101 \times 201 = 20301$$

یا:

$$S_n = \frac{n \times (2a_1 + (n-1) \times d)}{2} = \frac{101 \times (2 \times 1 + (101-1) \times f)}{2} = \frac{101 \times (2 + f \cdot 100)}{2} = \frac{101 \times f \cdot 102}{2} = 101 \times 201 = 20301$$

۴۲ می‌دانیم اگر $|a+b| = |a| + |b|$ آنگاه $ab \geq 0$ و همچنین $|a| = |-a|$. پس:

$$|1-2x| = |2x-1| \Rightarrow \underbrace{|5x-2|}_{a+b} = \underbrace{|3x-1|}_a + \underbrace{|2x-1|}_b$$

$$\xrightarrow{ab \geq 0} (3x-1)(2x-1) \geq 0$$

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
p	+	o	-	o	+

$$(-\infty, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$3x + 2y - 10 = 0$$

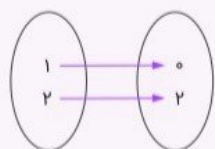
۴۳ فاصله رأس تا قطر، نصف قطر مربع است. ابتدا فاصله نقطه A تا خط داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{|3 + 4 - 10|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

بنابراین قطر مربع برابر $d = \frac{6}{\sqrt{13}}$ است.

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{36}{2 \times 13} = \frac{18}{13}$$

$$\begin{cases} (1) 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ (2) 2x - 2 = 2 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{دامنه: } \{1, 2\}$$



$$x^6 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 - 2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } -3$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \text{ جواب ندارد}$$

$$x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 1 = -3x \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

نقاط A و B را به صورت $(\alpha, 2\alpha - 1)$ در نظر می‌گیریم. فاصله این نقاط را از خط $3y - 4x - 7 = 0$ حساب کرده و برابر با ۶ قرار می‌دهیم:

$$\frac{|3(2\alpha - 1) - 4\alpha - 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 6 \Rightarrow \frac{|2\alpha - 10|}{5} = 6$$

$$\Rightarrow |2\alpha - 10| = 30 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} |\alpha - 5| = 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 5 = 15 \Rightarrow \alpha = 20 \Rightarrow A(20, 39) \\ \alpha - 5 = -15 \Rightarrow \alpha = -10 \Rightarrow B(-10, -21) \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{5 - x} \Rightarrow 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$$

$$g(x) = x^2 + 3 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 3 \leq 5\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

$$S_n > 125$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\frac{n}{2}(2(-1) + (n-1)(3)) > 125$$

$$d = 3 - (-1) = 4$$

$$\frac{n}{2}(3n - 5) > 125 \Rightarrow n(3n - 5) > 250$$

$$3n^2 - 5n - 250 > 0$$

$$\Rightarrow n > 10 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} \text{ حداقل ۱۱ جمله را با هم جمع نمایید}$$

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4x - 3 + 2 = 4x - 1$$

$$x = \frac{y+1}{4} \Rightarrow y = \frac{x+1}{4} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x + 5}{\frac{x}{x^2 - 4}} = \frac{(x^2 - 4)(3x + 5)}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x-3}} + 3 = x - 3 + 3 = x \Rightarrow (f \circ g)(x) = x$$

روش اول: این دو تابع وارون یکدیگرند. زیرا:

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + 3\right) - 3} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow (g \circ f)(x) = x$$

روش دوم: این دو تابع وارون یکدیگرند. زیرا:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} + 3 = \frac{1}{x_2} + 3 \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع یک به یک است}$$

$$y = \frac{1}{x} + 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = y - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x-3} = g(x)$$